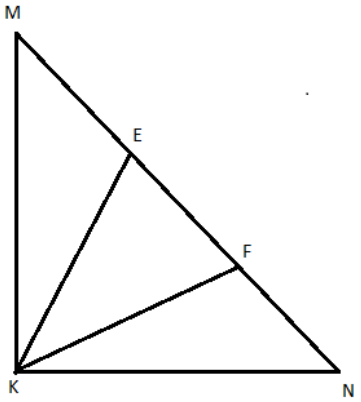
## I этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика»
## 12 октября 2024 года
## РЕШЕНИЯ. КРИТЕРИИ
## 8 класс

<table>
<tr><td>8.1</td><td>Ответ: 122, 123, 124.<br>Решение. До того, как было записано число 60, цифра 6 встречалась только в разряде единиц, поэтому даже двух шестёрок подряд быть не могло. Три цифры 6 подряд в первый раз встретятся в сочетании .. …6465666768… . Номера мест, на которых стоят эти три цифры 6 можно вычислить, либо непосредственно выписав весь ряд, либо следующим образом: от 1 до 9 в ряду стоят 9 цифр, а от 10 до 65 – 56 двузначных чисел, то есть 112 цифр. Всего до первой нужной цифры 6 стоит 112+9=121 цифра. Таким образом, три цифры 6 стоят на 122, 123 и 124 местах.</td></tr>
<tr><td>8.2.</td><td>Ответ:4 кг.<br>Решение. Обозначим Г, Т, Х – вес головы, туловища и хвоста соответственно. Тогда по условию Г=Т/2+Х, Т=Г+Х. Откуда Г=(Г+Х)/2+Х, т.е. Г=3Х. Значит, карп весит Г+Т+Х=3Х+(3Х+Х)+Х=8Х=4 кг.</td></tr>
<tr><td>8.3</td><td>Ответ: -31.<br>Решение. 29 – простое число, поэтому 29= - 29$\cdot 1 \cdot (-1)$, т.к. числа различные. Тогда 58= -29$\cdot 1 \cdot (-2)$ или 58= -29$\cdot (-1) \cdot 2$. В первом случае числа следующие: -29, -1,1,-2 и их сумма равна -31; во втором случае числа следующие: -29, -1,1,2 и их сумма равна -27. Наименьшая сумма -31.</td></tr>
<tr><td>8.4</td><td>Доказательство. $(x-2)^2+(x+y)^2+(2y+1)^2+3 \geq 0$.</td></tr>
<tr><td>8.5</td><td>Ответ. 45°.<br>

<br>Решение. В равнобедренном прямоугольном треугольникеMNK∠M=∠N=45°.<br>В равнобедренном треугольнике NKE ∠NKE=∠NEK= $\frac{1}{2}(180° - ∠N)$ =67,5°. Аналогично из треугольника KMF∠MKF =∠MFK=67,5°. Поэтому из треугольника KEF∠FKE=$180° - 67{,}5° - 67{,}5°$=45°.</td></tr>
</table>

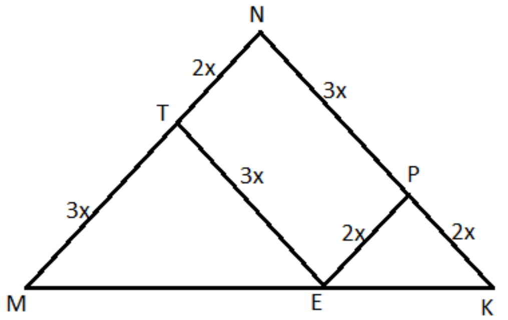
### Критерии оценивания

В любой ситуации оценивать следует единообразно все работы и в пользу учащихся с целью наибольшей мотивации на дальнейшее участие в математических соревнованиях. Особое внимание следует уделять единообразию проверки работ лидеров. Стараться не допускать наличия итоговых отметок в 0 баллов.

Шкала оценивания для всех заданий:

| № | | Качество выполнения задания |
|---|---|---|
| | 10 | Верное решение (доказательство) |
| | 9 | Верное решение с несущественной ошибкой. |
| | 7-8 | Верное решение с вычислительной ошибкой в конце решения. |
| | 3-6 | Есть начало решения, но не доведено до конца или содержит ошибки. |
| | 2 | Есть идея решения. |
| | 1 | Дан правильный ответ, решение отсутствует. |

# 9 класс

| | |
|---|---|
| 9.1 | Ответ: 100.<br>Решение. Число, которое делится на 5, должно оканчиваться на 5 или на 0. Зеркальное число оканчиваться на 0 не может, так как тогда оно должно на 0 начинаться. Итак, первая и последняя цифры - это 5. Вторая и третья цифра могут быть любыми – от сочетания 00 до сочетания 99 – всего 100 вариантов. Так как четвертая цифра повторяет вторую, всего различных чисел будет 100. |
| 9.2 | Ответ: -3, 2.<br>Решение. $((x-1)(x+2))((x(x+1))=24$, $(x^2+x-2)(x^2+x)=24$, $a=x^2+x$, $a^2-2a-24=0$, $a=-4$ или $a=6$. Откуда $x=-3$, $x=2$. |
| 9.3 | Ответ: -33.<br>Решение. 31 – простое число, поэтому $31=-31\cdot 1\cdot(-1)$, т.к. числа различные. Тогда $62=-31\cdot 1\cdot(-2)$ или $62=-31\cdot(-1)\cdot 2$. В первом случае числа следующие: -31, -1,1,-2 и их сумма равна -33; во втором случае числа следующие: -31, -1,1,2 и их сумма равна -29. Наименьшая сумма -33. |
| 9.4 | Доказательство. $(x-3)^2+(x-y)^2+(2y+1)^2+1\geq 0$. |
| 9.5 | Ответ: $\frac{6}{25}$.<br>Решение.<br><br><br>Четырехугольник TNPE – параллелограмм. NP=TE=TM=3x,NT=PE=PK=2x.<br>$\Delta MTE \sim \Delta MNK$, $K=\frac{MT}{MN}=\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$, $\frac{S_{MTE}}{S_{MNK}}=\frac{9}{25}$.<br>Аналогично $\Delta EPK \sim \Delta MNK$, $K=\frac{EP}{MN}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$, $\frac{S_{EPK}}{S_{MNK}}=\frac{4}{25}$.<br>$S_{PET}=\frac{1}{2}S_{TNPE}=\frac{1}{2}(S_{MNK}-S_{MTE}-S_{EPK})=\frac{1}{2}(1-\frac{9}{25}-\frac{4}{25})\,S_{MNK}=\frac{6}{25}S_{MNK}$. |

**Критерии оценивания**

В любой ситуации оценивать следует единообразно все работы и в пользу учащихся с целью наибольшей мотивации на дальнейшее участие в математических соревнованиях. Особое внимание следует уделять единообразию проверки работ лидеров. Стараться не допускать наличия итоговых отметок в 0 баллов.

Шкала оценивания для всех заданий:

| № | | Качество выполнения задания |
|---|---|---|
| | 10 | Верное решение (доказательство) |
| | 9 | Верное решение с несущественной ошибкой. |
| | 7-8 | Верное решение с вычислительной ошибкой в конце решения. |
| | 3-6 | Есть начало решения, но не доведено до конца или содержит ошибки. |
| | 2 | Есть идея решения. |
| | 1 | Дан правильный ответ, решение отсутствует. |

## 10 класс

**10.1** Ответ. Даша, 22 кг.

Решение. Сложим 82+74+75+65+62=358 (кг), получим удвоенный вес всех детей. Т.е. все дети весят 358/2=179 (кг). Маша, Поля, Катя, Саша в сумме весят 82+75=157(кг), т.е. Даша весит 179- 157=22 (кг). Аналогично находим, что Маша весит 179-(74+65)=40 (кг), Поля весит 179-(75+62)=42 (кг), Катя 179-(82+65)=32 (кг), Саша 179-(74+62)=43 (кг). Т.о. самая лёгкая Даша, 22 кг.

**10.2** Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Решение. x$\neq$ 0, $(4x+\frac{1}{x}-3)\left(4x+\frac{1}{x}+5\right)=9$, a=$4x+\frac{1}{x}$, (a-3)(a+5)=9, a=4 или a= -6. Отсюда x=$\frac{1}{2}$, x=$\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$.

**10.3** Ответ: -31, -27, 25, 33.

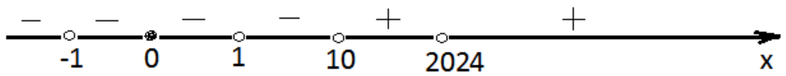
Решение. 29 – простое число, поэтому 29= $29\cdot 1\cdot 1=29\cdot(-1)\cdot(-1)=-29\cdot 1\cdot(-1)$.

1) Тогда 58= $29\cdot 1\cdot 2$, в этом случае числа следующие: 29, 1,1,2 и их сумма равна 33.
2) Тогда 58= $29\cdot(-1)\cdot(-2)$, в этом случае числа следующие: 29, -1,-1,-2 и их сумма равна 25.
3) Тогда 58= $-29\cdot 1\cdot(-2)$, в этом случае числа следующие: -29, 1,-1,-2 и их сумма равна -31 или 58= $-29\cdot(-1)\cdot 2$, в этом случае числа следующие: -29, 1,-1,2 и их сумма равна -27.

**10.4** Ответ: $\{0\}\cup(10;2024)\cup(2024;+\infty)$.

$$x\neq 2024\qquad \frac{x^3-x^2}{(x^2-9x-10)(x^2-1)}\geq 0$$

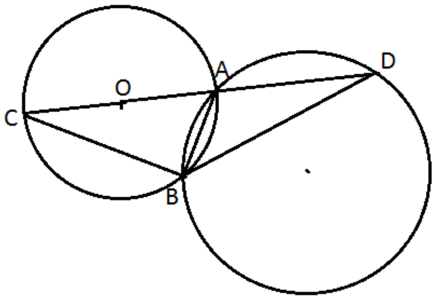
$$\frac{x^2(x-1)}{(x-10)(x+1)(x-1)(x+1)}\geq 0$$




$$x\in\{0\}\cup(10;2024)\cup(2024;+\infty)$$

**10.5** Ответ: $\frac{2\sqrt{205}}{3}$.

Решение.




Так как AC – диаметр меньшей окружности, то треугольник ABC – прямоугольный, $\angle ABC=90°$. При этом $\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$, $\cos\angle BAD=-\frac{4}{5}$. По теореме косинусов для треугольника ABD получаем $BD^2=64+16-64\cos\angle BAD=\frac{656}{5}$, $BD=\frac{4\sqrt{205}}{5}$.

$\sin\angle BAD=\sin\angle BAC=\frac{3}{5}$,

С другой стороны, из теоремы синусов для треугольника ABD имеем BD = 2R $\sin\angle BAD$. Отсюда R =$\frac{2\sqrt{205}}{3}$.

### Критерии оценивания

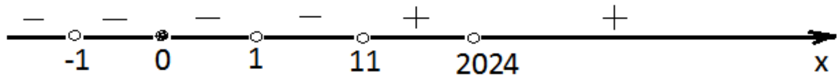
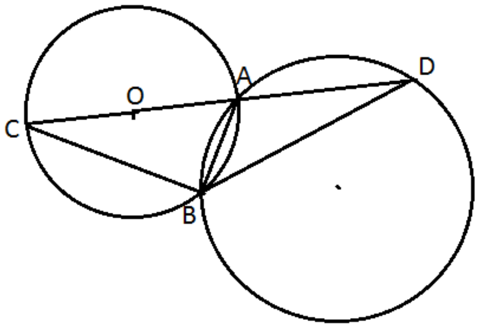
В любой ситуации оценивать следует единообразно все работы и в пользу учащихся с целью наибольшей мотивации на дальнейшее участие в математических соревнованиях. Особое внимание следует уделять единообразию проверки работ лидеров. Стараться не допускать наличия итоговых отметок в 0 баллов.

Шкала оценивания для всех заданий:

| № | | Качество выполнения задания |
|---|---|---|
| | 10 | Верное решение (доказательство) |

| | | |
|---|---|---|
| | 9 | Верное решение с несущественной ошибкой. |
| | 7-8 | Верное решение с вычислительной ошибкой в конце решения. |
| | 3-6 | Есть начало решения, но не доведено до конца или содержит ошибки. |
| | 2 | Есть идея решения. |
| | 1 | Дан правильный ответ, решение отсутствует. |

# 11 класс

<table>
<tr><td>11.1</td><td>Ответ. Саша, 43 кг.<br>Решение. Сложим 82+74+75+65+62=358 (кг), получим удвоенный вес всех детей. Т.е. все дети весят 358/2=179 (кг). Маша, Поля, Катя, Саша в сумме весят 82+75=157(кг), т.е. Даша весит 179- 157=22 (кг). Аналогично находим, что Маша весит 179-(74+65)=40 (кг), Поля весит 179-(75+62)=42 (кг), Катя 179-(82+65)=32 (кг), Саша 179-(74+62)=43 (кг). Т.о. самый тяжёлый Саша, 43 кг.</td></tr>
<tr><td>11.2</td><td>Ответ: 8.<br>Решение.<br>$\frac{128cos20°cos40°cos60°cos80°sin20°}{sin20°} = \frac{32sin40°cos40°cos80°}{sin20°} = \frac{16sin80°cos80°}{sin20°} = \frac{8sin160°}{sin20°} = \frac{8sin20°}{sin20°} = 8.$</td></tr>
<tr><td>11.3</td><td>Ответ: -33, -29, 27, 35.<br>Решение. 31 – простое число, поэтому 31= $31\cdot 1 \cdot 1 = 31 \cdot (-1) \cdot (-1) = -31 \cdot 1 \cdot (-1)$.<br>4) Тогда 62= $31\cdot 1 \cdot 2$, в этом случае числа следующие: 31, 1,1,2 и их сумма равна 35.<br>5) Тогда 62= $31\cdot (-1) \cdot (-2)$, в этом случае числа следующие: 31, -1,-1,-2 и их сумма равна 27.<br>6) Тогда 62= $-31\cdot 1 \cdot (-2)$, в этом случае числа следующие: -31, 1,-1,-2 и их сумма равна -33 или 62= $-31\cdot (-1) \cdot 2$, в этом случае числа следующие: -31, 1,-1,2 и их сумма равна -29.</td></tr>
<tr><td>11.4</td><td>Ответ: $\{0\} \cup (11; 2024) \cup (2024; +\infty)$.<br>$$x \neq 2024 \quad \frac{x^3 - x^2}{(x^2 - 10x - 11)(x^2 - 1)} \geq 0$$<br>$$\frac{x^2(x-1)}{(x-11)(x+1)(x-1)(x+1)} \geq 0$$<br><br><br>$$x \in \{0\} \cup (11; 2024) \cup (2024; +\infty)$$</td></tr>
<tr><td>11.5</td><td>Ответ: $\frac{2\sqrt{205}}{3}$.<br>Решение.<br><br><br>Так как AC – диаметр меньшей окружности, то треугольник ABC – прямоугольный, ∠ABC = 90°. При этом cos∠BAC = $\frac{4}{5}$, cos∠BAD = - $\frac{4}{5}$. По теореме косинусов для треугольника ABD получаем $BD^2$ = 64 + 16 - 64 cos∠BAD =$\frac{656}{5}$, $BD = \frac{4\sqrt{205}}{5}$.<br>sin∠BAD = sin∠BAC = $\frac{3}{5}$,<br>С другой стороны, из теоремы синусов для треугольника ABD имеем BD = 2R sin∠BAD.<br>Отсюда R =$\frac{2\sqrt{205}}{3}$.</td></tr>
</table>

**Критерии оценивания**

В любой ситуации оценивать следует единообразно все работы и в пользу учащихся с целью наибольшей мотивации на дальнейшее участие в математических соревнованиях. Особое внимание следует уделять единообразию проверки работ лидеров. Стараться не допускать наличия итоговых отметок в 0 баллов.

Шкала оценивания для всех заданий:

| № | | Качество выполнения задания |
|---|---|---|
| | 10 | Верное решение (доказательство) |
| | 9 | Верное решение с несущественной ошибкой. |

| | | |
|---|---|---|
| | 7-8 | Верное решение с вычислительной ошибкой в конце решения. |
| | 3-6 | Есть начало решения, но не доведено до конца или содержит ошибки. |
| | 2 | Есть идея решения. |
| | 1 | Дан правильный ответ, решение отсутствует. |